FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

AM430 - Equazioni Differenziali Ordinarie

LA TRASFORMATA DI LAPLACE

Elettra Cesareo
matricola 554337

Manolo Bartocci
matricola 526354

Anno Accademico 2019-2020
Dipartimento di Matematica

Introduzione

In questo breve studio, ci occuperemo della trasformata di Laplace e del suo potenziale utilizzo come metodo risolutivo di un'equazione differenziale. Inizieremo introducendo la classe delle funzioni di ordine esponenziale mostrando anche qualche proprietà di tali funzioni; successivamente, definiremo il concetto di trasformata (unilatera e bilatera) di Laplace, concentrandoci sulla prima di esse ed esponendo qualche risultato notevole. Dopo aver fatto qualche esempio pratico, focalizzeremo la nostra attenzione sulla trasformata inversa e mostreremo la sua utilità nella risoluzione di un'equazione differenziale. Infine, tratteremo anche la convoluzione poiché anch'essa, così come la trasformata inversa di Laplace, potrà tornarci utile in vista di un'equazione differenziale.

Indice

1 Premessa storica 1

2 La classe delle funzioni di ordine esponenziale 3

3 La trasformata di Laplace 5

4 Alcune proprietà 7

5 La trasformata inversa di Laplace 13

6 Applicazione alle equazioni differenziali 17

7 La convoluzione 21

Bibliografia/Sitografia 27

1 Premessa storica

A metà del XVIII secolo, Eulero, studiando alcune equazioni differenziali, si imbatte in integrali della forma

$$\int X(x)\, e^{ax}\, dx \qquad e \qquad \int X(x)\, x^A\, dx,$$

i quali, come vedremo, ricordano la definizione della trasformata di Laplace. Tuttavia, non ne ricava nulla di utile e non continua ad investigare.
Similmente fece Lagrange, grande estimatore di Eulero, cominciando a studiare formule come

$$\int X(x)\, e^{-ax}\, a^x\, dx$$

tramite il suo lavoro sulle funzioni di densità di probabilità di determinati eventi.
Questi integrali destarono l'attenzione di Laplace, il quale, più che cercare di risolverli, intravedendo il loro potenziale utilizzo, li applicò a certe funzioni: fu il passo decisivo che permise di esemplificare la risoluzione di un'equazione differenziale lineare. Inoltre, egli capì anche che, in un certo senso, essi potevano generalizzare le serie di Fourier: infatti, al contrario di quest'ultime che sono periodiche e dunque applicabili in una regione limitata dello spazio, questi integrali possono essere applicati indefinitamente.
La teoria fu successivamente sviluppata tra il XIX ed il XX secolo da scienziati come M. Lerch, O. Heaviside e T. Bromwich (che ritroveremo successivamente nella trasformata inversa di Laplace), mentre la diffusione a livello internazionale, soprattutto in ambito ingegneristico, avvenne durante e subito dopo la seconda guerra mondiale, rimpiazzando il metodo del calcolo operazionale di Heaviside per la risoluzione di equazioni differenziali lineari.
Oggi, la trasformata di Laplace ha vari usi anche in ambito probabilistico, oltre ad essere un potente mezzo per la risoluzione di equazioni differenziali lineari.

2 La classe delle funzioni di ordine esponenziale

Prima di introdurre formalmente l'argomento, parleremo di una classe di funzioni che ci tornerà utile in vista della trasformata di Laplace.

DEFINIZIONE 2.1. Una funzione f è detta *di ordine esponenziale* se $f \in \mathcal{C}$, dove $\mathcal{C} := \{f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \exists\, a \in \mathbb{R}, \exists\, c > 0 \; t.c. \; |f(t)| \leq c\, e^{at}, \forall\, t \in \mathbb{R}\}$.

ESEMPIO 2.1.

(i) $f \in \mathcal{C}$, con $a = 0$, $\forall\, f$ limitata.

(ii) $f(t) = e^{t^2} \notin \mathcal{C}$.

(iii) $f(t) = e^t \in \mathcal{C}$, con $c = 1$ e $a = 1$.

PROPOSIZIONE 2.1 (Proprietà di $\mathcal{C}$). Siano $f, g \in \mathcal{C}$. Allora valgono le seguenti affermazioni:

(i) $\alpha f + \beta g \in \mathcal{C}$, $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(ii) $t^n f \in \mathcal{C}$, $\forall\, t \geq 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Dimostrazione.

(i) $|\alpha f + \beta g| \leq |\alpha||f| + |\beta||g| \leq {}^{1}|\alpha| c_1 e^{a_1 t} + |\beta| c_2 e^{a_2 t} \leq {}^{2} c_3 e^{a_3 t} \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$

$\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \alpha f + \beta g \in \mathcal{C}$.

[1] $|f| \leq c_1 e^{a_1 t}, \;\; |g| \leq c_2 e^{a_2 t}$

[2] $c_3 := 2\, max\{|\alpha| c_1, |\beta| c_2\}, \;\; a_3 := max\{a_1, a_2\}$

(ii) Siano $a, c > 0$ t.c. $t^n \leq ce^{at}$, $\forall\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dunque, si ha che

$$|t^n f| = |t^n||f| \leq {}^{3}|ce^{at}|c_f e^{a_f t} = ce^{at} c_f e^{a_f t} = cc_f e^{(a+a_f)t} = {}^{4}c_{tot} e^{a_{tot}} \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} t^n f \in \mathcal{C}.$$

[3] $|f| \leq c_f e^{a_f t}$
[4] $c_{tot} := cc_f, \;\; a_{tot} := a + a_f$

La trasformata di Laplace

3

In questo capitolo ci occuperemo di definire la trasformata di Laplace e di fornire alcuni esempi elementari.

DEFINIZIONE 3.1. La *trasformata* (unilatera) *di Laplace* di f, con

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}_+ \cup \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(t) \end{array}$$, è la funzione

$$F_u(s) = \mathcal{L}[f](s) = \mathcal{L}[f] := \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt,$$

dove $s = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Analogamente, se $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(t) \end{array}$, la *trasformata bilatera di Laplace* di f è data da

$$F_b(s) = \mathcal{B}[f](s) = \mathcal{B}[f] := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt,$$

dove $s = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

OSSERVAZIONE 3.1.

(i) Porremo maggiore attenzione alla trasformata unilatera e al caso $\beta = 0$ (ossia, $s \in \mathbb{R}$).

(ii) In generale, può accadere che $\mathcal{L}[f](s)$ diverga (o, addirittura, non sia ben definita). Tuttavia, se $f \in \mathcal{C}$, allora $e^{-st} f(t)$ è integrabile su $[0, +\infty)$, $\forall\ s > a$ (dove a soddisfa $|f(t)| \leq c\, e^{at}$, con $c > 0$): infatti, $e^{-st} f(t) \leq |\mathrm{e}^{-st} f(t)| \leq e^{-st}\, c\, e^{at} = c\, e^{(a-s)t}$ e quindi

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt \leq \int_0^{+\infty} c\, e^{(a-s)t}\, dt < +\infty.$$

Dunque, se $f \in \mathcal{C}$, $\mathcal{L}[f](s)$ esiste ed è finita, e non c'è quindi bisogno di ridursi a lavorare in regioni di convergenza come, in generale, bisogna fare. In altre parole, la trasformata di Laplace è una funzione in s definita in $s > a$. Tale semiretta è anche detta *dominio di convergenza* di f.

ESEMPIO 3.1.

(i) Se $f(t) = k \in \mathbb{R}$, allora

$$\mathcal{L}[k](s) := \int_0^{+\infty} ke^{-st}\, dt = -\frac{k}{s}\left[e^{-st}\right]_0^{+\infty} = -\frac{k}{s}\,(0-1) = \frac{k}{s},\ \ s > 0.$$

(ii) Se $f(t) = e^{at},\ \ a \in \mathbb{R}$, allora

$$\mathcal{L}[e^{at}](s) := \int_0^{+\infty} e^{at}\, e^{-st}\, dt = \int_0^{+\infty} e^{(a-s)t}\, dt =$$

$$= \frac{1}{a-s}\left[e^{(a-s)t}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{a-s}\,(0-1) = \frac{1}{s-a},\ \ s > a.$$

N.B. Naturalmente, se in (ii) si ha $a = 0$, allora ci si riconduce al caso (i) con $k = 1$.

4 Alcune proprietà

Andremo ora a studiare alcune proprietà elementari della trasformata di Laplace di funzioni $f \in \mathcal{C}$.

Proposizione 4.1 (Proprietà di $\mathcal{L}$). Date $f, g \in \mathcal{C}$, valgono i seguenti risultati:

(i) $\mathcal{L}[\alpha f + \beta g] = \alpha \mathcal{L}[f] + \beta \mathcal{L}[g]$, $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(ii) Se $f \in C^p(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, con $p \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, e $f^{(j)} \in \mathcal{C}$, $\forall\, 0 \leq j \leq n$, allora

$$\mathcal{L}[f^{(n)}] = s^n \mathcal{L}[f] - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-(k+1)} f^{(k)}(0),$$

$\forall\, n \leq p$.

(iii) Posto

$$\phi(t) := \int_0^t f(r)\, dr,$$

allora $\phi(t) \in \mathcal{C}$ e si ha che $\mathcal{L}[\phi] = \frac{\mathcal{L}[f]}{s}$, $s \neq 0$.

(iv) Se $t \geq 0$, allora $\mathcal{L}[t^n f] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}(\mathcal{L}[f])$.

N.B. Ovviamente, la (i) si generalizza immediatamente a combinazioni lineari qualunque: infatti, se $f_i \in \mathcal{C}$ e $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $\forall\, 1 \leq i \leq k$, $k \in \mathbb{N}$, allora

$$\mathcal{L}\Big[\sum_{i=1}^{k} \alpha_i f_i\Big] = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathcal{L}[f_i].$$

Dimostrazione.

(i) Innanzitutto, se $f, g \in \mathcal{C}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, allora $\alpha f + \beta g \in \mathcal{C}$ per (i) della proposizione 2.1. Dopodiché, si ha che

$$\mathcal{L}[\alpha f+\beta g] := \int_0^{+\infty} e^{-st}\Big(\alpha f(t)+\beta g(t)\Big)\,dt =$$

$$= \alpha\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\,dt + \beta\int_0^{+\infty} e^{-st} g(t)\,dt = \alpha\mathcal{L}[f]+\beta\mathcal{L}[g].$$

(ii) Per induzione su $n \in \mathbb{N}$.

- $n = 1$:

$$\mathcal{L}[f'] := \int_0^{+\infty} e^{-st} f'(t)\,dt = \Big[e^{-st} f(t)\Big]_0^{+\infty} + s\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\,dt = s\mathcal{L}[f] - f(0).$$

- $n \geq 2$:

$$\mathcal{L}[f^{(n)}] := \int_0^{+\infty} e^{-st} f^{(n)}(t)\,dt = \Big[e^{-st} f^{(n-1)}(t)\Big]_0^{+\infty} + s\int_0^{+\infty} e^{-st} f^{(n-1)}(t)\,dt =$$

$$= -f^{(n-1)}(0) + s\mathcal{L}[f^{(n-1)}] = {}^{5}\!-f^{(n-1)}(0) + s\left(s^{n-1}\mathcal{L}[f] - \sum_{k=0}^{n-2} s^{(n-1)-(k+1)} f^{(k)}(0)\right) =$$

$$= -f^{(n-1)}(0) + s^n\mathcal{L}[f] - \sum_{k=0}^{n-2} s^{n-(k+1)} f^{(k)}(0) = s^n\mathcal{L}[f] - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-(k+1)} f^{(k)}(0).$$

(iii)
- Se $a > 0$, poiché

$$|\phi(t)| = \left|\int_0^t f(r)\,dr\right| \leq \int_0^t |f(r)|\,dr \leq c\int_0^t e^{ar}\,dr = \frac{c}{a}\,(e^{at}-1) \leq \frac{c}{a}\,e^{at},$$

allora $\phi(t) \in \mathcal{C}$.

- Se $a = 0$, poiché

$$|\phi(t)| = \left|\int_0^t f(r)\,dr\right| \leq \int_0^t |f(r)|\,dr \leq c\int_0^t dr = c\,t \leq c\,e^t,$$

allora $\phi(t) \in \mathcal{C}$.

[5] avendo assunto induttivamente che

$$\mathcal{L}[f^{(n-1)}] = s^{n-1}\mathcal{L}[f] - \sum_{k=0}^{n-2} s^{(n-1)-(k+1)} f^{(k)}(0)$$

- Se $a < 0$, poiché

$$|\phi(t)| = \left|\int_0^t f(r)\,dr\right| \leq \int_0^t |f(r)|\,dr \leq c\int_0^t e^{ar}\,dr = \frac{c}{a}\,(e^{at}-1) =$$

$$= \frac{c}{-a}\,(1-e^{at}) \leq \frac{c}{-a} = \frac{c}{-a}\,e^{0t},$$

allora $\phi(t) \in \mathcal{C}$.

Ora, poiché $\phi'(t) = f(t)$ e $\phi(0) = 0$, da (ii) segue che

$$\mathcal{L}[f] = \mathcal{L}[\phi'] = s\mathcal{L}[\phi] - \phi(0) = s\mathcal{L}[\phi] \Longleftrightarrow \mathcal{L}[\phi] = \frac{\mathcal{L}[f]}{s},\ s \neq 0.$$

(iv) Innanzitutto, se $t \geq 0$, da (ii) della proposizione 2.1. si ha che $t^n f \in \mathcal{C}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Dopodiché, per induzione su $n \in \mathbb{N}$.

- $n = 1$:

$$\frac{d}{ds}(\mathcal{L}[f]) = \frac{d}{ds}\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial s}\,(e^{-st}) f(t)\,dt =$$

$$= -\int_0^{+\infty} e^{-st}\ t\ f(t)\,dt = -\mathcal{L}[tf] \Longleftrightarrow \mathcal{L}[tf] = -\frac{d}{ds}(\mathcal{L}[f]).$$

- $n \geq 2$:

$$\frac{d^n}{ds^n}(\mathcal{L}[f]) = \frac{d}{ds}\left(\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}(\mathcal{L}[f])\right) = {}^{6}\frac{d}{ds}\Big((-1)^{n-1}\mathcal{L}[t^{n-1}f]\Big) =$$

$$= (-1)^{n-1}\ \frac{d}{ds}(\mathcal{L}[t^{n-1}f]) = (-1)^{n-1}\ \frac{d}{ds}\int_0^{+\infty} e^{-st}\ t^{n-1}\ f(t)\,dt =$$

$$= (-1)^{n-1}\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial s}(e^{-st})\,t^{n-1}\,f(t)\,dt = (-1)^{n-1}(-1)\int_0^{+\infty} e^{-st}\,t^n\,f(t)\,dt =$$

$$= (-1)^n\ \mathcal{L}[t^n f] \Longleftrightarrow \mathcal{L}[t^n f] = (-1)^n\ \frac{d^n}{ds^n}(\mathcal{L}[f]).$$

[6] avendo assunto induttivamente che

$$\mathcal{L}[t^{n-1}f] = (-1)^{n-1}\ \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}(\mathcal{L}[f]) \Longleftrightarrow (-1)^{n-1}\ \mathcal{L}[t^{n-1}f] = \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}(\mathcal{L}[f])$$

PROPOSIZIONE 4.2 (Trasformata di Laplace di alcune funzioni elementari).

(i) $\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$, $s > 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

(ii) $\mathcal{L}[t^n e^t] = \frac{n!}{(s-1)^{n+1}}$, $s > 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

(iii) $\mathcal{L}[\sin(\omega t)] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$, $\forall\, \omega \in \mathbb{R}$.

(iv) $\mathcal{L}[\cos(\omega t)] = \frac{s}{s^2+\omega^2}$, $\forall\, \omega \in \mathbb{R}$.

(v) $\mathcal{L}[\sinh(\omega t)] = \frac{\omega}{s^2-\omega^2}$, $s > \omega$, $\forall\, \omega \in \mathbb{R}$.

(vi) $\mathcal{L}[\cosh(\omega t)] = \frac{s}{s^2-\omega^2}$, $s > \omega$, $\forall\, \omega \in \mathbb{R}$.

(vii) $\mathcal{L}[e^{at} f(t)](s) = \mathcal{L}[f](s-a)$, $a \in \mathbb{R}$, $\forall\, \omega \in \mathbb{R}$.

N.B. Ovviamente, se $n = 0$ in (i) e (ii) oppure se $\omega = 0$ in (iii), (iv), (v) e (vi), si trova che $\mathcal{L}[0] = \frac{0}{s} = 0$, $\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}$ e $\mathcal{L}[e^t] = \frac{1}{s-1}$, relazioni già trovate nell'esempio 3.1.

Dimostrazione.

(i) Innanzitutto, mostriamo per induzione che $\frac{d^n}{ds^n}\left(\frac{1}{s}\right) = (-1)^n \frac{n!}{s^{n+1}}$.

- $n = 1$:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s}\right) = -\frac{1}{s^2}.$$

- $n \geq 2$:

$$\frac{d^n}{ds^n}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{d}{ds}\left(\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}\left(\frac{1}{s}\right)\right) = {}^{7}\frac{d}{ds}\left((-1)^{n-1}\,\frac{(n-1)!}{s^n}\right) =$$

$$= (-1)^{n-1}\,(n-1)!\,\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^n}\right) = (-1)^{n-1}\,(n-1)!\,(-n)\,\frac{1}{s^{n+1}} = (-1)^n\,\frac{n!}{s^{n+1}}.$$

[7] avendo assunto induttivamente che

$$\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}\left(\frac{1}{s}\right) = (-1)^{n-1}\,\frac{(n-1)!}{s^n}$$

Ora, usando (iv) della proposizione 4.1. con $f \equiv 1$, si ha che

$$\mathcal{L}[t^n] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}(\mathcal{L}[1]) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\left(\frac{1}{s}\right) = (-1)^n (-1)^n \frac{n!}{s^{n+1}} = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

(ii) Per (iv) della proposizione 4.1., si ha che

$$\mathcal{L}[t^n e^t] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}(\mathcal{L}[e^t]) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\left(\frac{1}{s-1}\right) = {}^{8}$$

$$= (-1)^n (-1)^n \frac{n!}{(s-1)^{n+1}} = \frac{n!}{(s-1)^{n+1}}.$$

(iii) Per linearità e per (ii) della proposizione 4.1. (dato che $\frac{d}{dt}(\sin(\omega t)) = = \omega\cos(\omega t)$ e $\frac{d}{dt}(\cos(\omega t)) = -\omega\sin(\omega t)$), si ha che

$$\omega\mathcal{L}[\cos(\omega t)] = \mathcal{L}[\omega\cos(\omega t)] = s\mathcal{L}[\sin(\omega t)] - \sin(0) = s\mathcal{L}[\sin(\omega t)]$$

e

$$-\omega\mathcal{L}[\sin(\omega t)] = \mathcal{L}[-\omega\sin(\omega t)] = s\mathcal{L}[\cos(\omega t)] - \cos(0) = s\mathcal{L}[\cos(\omega t)] - 1,$$

risultati che si traducono in

$$\mathcal{L}[\cos(\omega t)] = \frac{s\mathcal{L}[\sin(\omega t)]}{\omega}$$

e

$$\mathcal{L}[\sin(\omega t)] = \frac{s\mathcal{L}[\cos(\omega t)] - 1}{-\omega} = \frac{1 - s\mathcal{L}[\cos(\omega t)]}{\omega}$$

fintanto che $w \neq 0$ (come osservato precedentemente, se così non fosse la tesi sarebbe banale). Dopodiché, inserendo la prima relazione trovata nella seconda, si ottiene

$$\mathcal{L}[\sin(\omega t)] = \frac{1 - s\mathcal{L}[\cos(\omega t)]}{\omega} = \frac{1 - s\,\frac{s\mathcal{L}[\sin(\omega t)]}{\omega}}{\omega} = \frac{1}{\omega} - \frac{s^2\mathcal{L}[\sin(\omega t)]}{\omega^2} \iff$$

$$\iff \mathcal{L}[\sin(\omega t)] + \frac{s^2\mathcal{L}[\sin(\omega t)]}{\omega^2} = \frac{1}{\omega} \iff \left(1 + \frac{s^2}{\omega^2}\right)\mathcal{L}[\sin(\omega t)] = \frac{1}{\omega} \iff$$

$$\iff \left(\frac{s^2 + \omega^2}{\omega^2}\right)\mathcal{L}[\sin(\omega t)] = \frac{1}{\omega} \iff \mathcal{L}[\sin(\omega t)] = \frac{1}{\omega}\,\frac{\omega^2}{s^2 + \omega^2} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

[8] per (i)

(iv) Viceversa, inserendo la seconda relazione trovata in (iii) nella prima, si ottiene

$$\mathcal{L}[\cos(\omega t)] = \frac{s\mathcal{L}[\sin(\omega t)]}{\omega} = \frac{s\,\frac{1-s\mathcal{L}[\cos(\omega t)]}{\omega}}{\omega} = \frac{s - s^2\mathcal{L}[\cos(\omega t)]}{\omega^2} =$$

$$= \frac{s}{\omega^2} - \frac{s^2\mathcal{L}[\cos(\omega t)]}{\omega^2} \iff \mathcal{L}[\cos(\omega t)] + \frac{s^2\mathcal{L}[\cos(\omega t)]}{\omega^2} = \frac{s}{\omega^2} \iff$$

$$\iff \left(1 + \frac{s^2}{\omega^2}\right)\mathcal{L}[\cos(\omega t)] = \frac{s}{\omega^2} \iff \left(\frac{s^2+\omega^2}{\omega^2}\right)\mathcal{L}[\cos(\omega t)] = \frac{s}{\omega^2} \iff$$

$$\iff \mathcal{L}[\cos(\omega t)] = \frac{s}{\omega^2}\,\frac{\omega^2}{s^2+\omega^2} = \frac{s}{s^2+\omega^2}.$$

(v) Utilizzando la definizione del seno iperbolico, si ha che

$$\mathcal{L}[\sinh(\omega t)] = \mathcal{L}\left[\frac{1}{2}(e^{\omega t} - e^{-\omega t})\right] = \frac{1}{2}\,\mathcal{L}[e^{\omega t}] - \frac{1}{2}\,\mathcal{L}[e^{-\omega t}] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-\omega}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s+\omega}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{(s+\omega)-(s-\omega)}{(s-\omega)(s+\omega)} = \frac{\omega}{s^2-\omega^2}.$$

(vi) Utilizzando la definizione del coseno iperbolico, si ha che

$$\mathcal{L}[\cosh(\omega t)] = \mathcal{L}\left[\frac{1}{2}(e^{\omega t} + e^{-\omega t})\right] = \frac{1}{2}\,\mathcal{L}[e^{\omega t}] + \frac{1}{2}\,\mathcal{L}[e^{-\omega t}] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-\omega}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s+\omega}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{(s+\omega)+(s-\omega)}{(s-\omega)(s+\omega)} = \frac{s}{s^2-\omega^2}.$$

(vii) Utilizzando la definizione della trasformata di Laplace, si ha che

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)](s) := \int_0^{+\infty} e^{-st}\,e^{at}\,f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s-a)t}\,f(t)\,dt =: \mathcal{L}[f](s-a).$$

ESEMPIO 4.1.

(i) $\mathcal{L}[t\sin(t)] = -\frac{d}{ds}(\mathcal{L}[\sin(t)]) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = -\left(-2s\,\frac{1}{(s^2+1)^2}\right) = \frac{2s}{(s^2+1)^2}$.

(ii) $\mathcal{L}[e^{2t}\sin(t)] = \mathcal{L}[\sin(t)](s-2) = \frac{1}{(s-2)^2+1} = \frac{1}{s^2-2s+5}$.

5 La trasformata inversa di Laplace

Vogliamo ora definire, qualora esista, la trasformata inversa (detta anche antitrasformata) di Laplace.

DEFINIZIONE 5.1. Data $F(s)$ la trasformata di Laplace di $f(t)$, ossia $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, allora la $trasformata\ inversa$ (o antitrasformata) $di\ Laplace$ di $F(s)$, denotata $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ o più semplicemente $\mathcal{L}^{-1}[F]$, è $f(t)$.

OSSERVAZIONE 5.1.

(i) A priori, la trasformata inversa di una funzione qualsiasi potrebbe non esistere oppure non essere univocamente determinata (rendendo quindi vaga la definizione 5.1.). Infatti, due funzioni che differiscono solo in un numero finito di punti presentano la stessa trasformata di Laplace. Tuttavia, considerando il caso di funzioni continue, si può ignorare tutto ciò e affermare che $\mathcal{L}[f] = \mathcal{L}[g] \iff f(t) = g(t)$, $\forall t \geq 0$, e $g(t) = \mathcal{L}^{-1}[f] \iff \mathcal{L}[g] = f(t)$, poiché una data funzione continua può essere la trasformata di Laplace di una sola funzione continua.

(ii) In generale, l'antitrasformata di Laplace può essere espressa in forma integrale come segue:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{T \to +\infty} \int_{\gamma - iT}^{\gamma + iT} e^{st} F(s)\, ds,$$

dove $\gamma = \Re(s)$ è la linea verticale nel piano complesso lungo cui avviene l'integrazione, la quale è maggiore della parte reale di tutte le singolarità di F. Ciò assicura che la linea di contorno è nella regione di convergenza. Tale formulazione è detta "integrale di Bromwich" o "formula inversa di Mellin". Si noti che, se le singolarità di F si trovano tutte nella parte sinistra del piano complesso oppure non esistono,

allora γ può essere presa nulla e la formula coincide con la trasformata inversa di Fourier: infatti, se $s = x + iy$, allora si ha che

$$\frac{1}{2\pi i} \lim_{T\to+\infty} \int_{-iT}^{iT} e^{st} F(s)\, ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} e^{iyt} F(iy)\, dy.$$

(iii) La linearità di $\mathcal{L}$ implica quella di $\mathcal{L}^{-1}$: innanzitutto notiamo che, per quanto appena detto, nel caso di funzioni continue valgono

$$\mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}[f]] = \bar{f} \Longleftrightarrow \mathcal{L}[f] = \mathcal{L}[\bar{f}] \Longleftrightarrow f = \bar{f}$$

e

$$\mathcal{L}[\mathcal{L}^{-1}[g]] = \bar{g} \Longleftrightarrow \mathcal{L}^{-1}[g] = \mathcal{L}^{-1}[\bar{g}] \Longleftrightarrow g = \mathcal{L}[\mathcal{L}^{-1}[\bar{g}]] =$$
$$= \mathcal{L}[\mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}[\mathcal{L}^{-1}[g]]]] = \mathcal{L}[\mathcal{L}^{-1}[g]] = \bar{g}.$$

Siano, ora,

$$f = \mathcal{L}^{-1}[\bar{f}] \Longleftrightarrow \mathcal{L}[f] = \bar{f} \quad e \quad g = \mathcal{L}^{-1}[\bar{g}] \Longleftrightarrow \mathcal{L}[g] = \bar{g},$$

dove $f, g, \bar{f}, \bar{g} \in \mathcal{C}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Allora

$$\mathcal{L}[\alpha f + \beta g] = \alpha\mathcal{L}[f] + \beta\mathcal{L}[g] \Longleftrightarrow \alpha\mathcal{L}^{-1}[\bar{f}] + \beta\mathcal{L}^{-1}[\bar{g}] = \alpha f + \beta g =$$
$$= \mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}[\alpha f + \beta g]] = \mathcal{L}^{-1}[\alpha\mathcal{L}[f] + \beta\mathcal{L}[g]] = \mathcal{L}^{-1}[\alpha\bar{f} + \beta\bar{g}].$$

ESEMPIO 5.1.

(i) Trovare

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-a)(s-b)}\right],\ a \neq b:$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-a)(s-b)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(a-b)(s-a)} - \frac{1}{(a-b)(s-b)}\right] =$$
$$= \frac{1}{a-b}\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right] - \frac{1}{a-b}\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-b}\right] = \frac{1}{a-b}\,(e^{at}) - \frac{1}{a-b}\,(e^{bt}) = \frac{e^{at} - e^{bt}}{a-b}.$$

(ii) Trovare

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2 + 2s + 2}\right]:$$

pociché $h(x) \neq 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, con $h(s) := s^2 + 2s + 2$, allora dobbiamo ricorrere ad un metodo alternativo per determinare

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+2s+2}\right].$$

Poiché $s^2 + 2s + 2 = (s+1)^2 + 1$, allora si ottiene che

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+2s+2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2+1}\right] = e^{-t}\sin(t).$$

Osservazione 5.2. Tabella riassuntiva della trasformata di Laplace (e della trasformata inversa) delle funzioni elementari prese in esame finora:

f	$\mathcal{L}[f]$	g	$\mathcal{L}^{-1}[g]$
$k \in \mathbb{R}$	$\frac{k}{s},\ s > 0$	$\frac{k}{s},\ s > 0,\ k \in \mathbb{R}$	k
$e^{at},\ a \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{s-a},\ s > a$	$\frac{1}{s-a},\ s > a,\ a \in \mathbb{R}$	e^{at}
$t^n,\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$	$\frac{n!}{s^{n+1}},\ s > 0$	$\frac{n!}{s^{n+1}},\ s > 0,\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$	t^n
$\sin(\omega t),\ \omega \in \mathbb{R}$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2},\ \omega \in \mathbb{R}$	$\sin(\omega t)$
$\cos(\omega t),\ \omega \in \mathbb{R}$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\frac{s}{s^2+\omega^2},\ \omega \in \mathbb{R}$	$\cos(\omega t)$
$\sinh(\omega t),\ \omega \in \mathbb{R}$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2},\ s > \omega$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2},\ s > \omega,\ \omega \in \mathbb{R}$	$\sinh(\omega t)$
$\cosh(\omega t),\ \omega \in \mathbb{R}$	$\frac{s}{s^2-\omega^2},\ s > \omega$	$\frac{s}{s^2-\omega^2},\ s > \omega,\ \omega \in \mathbb{R}$	$\cosh(\omega t)$
$e^{at}\, h(t),\ a \in \mathbb{R}$	$\mathcal{L}[h](s-a)$	$\mathcal{L}[h](s-a),\ a \in \mathbb{R}$	$e^{at}\, h(t)$

6 Applicazione alle equazioni differenziali

La trasformata di Laplace può essere utilizzata per risolvere equazioni differenziali lineari a valori iniziali: il vantaggio che essa apporta è che, invece di applicare i metodi risolutivi canonici, basta risolvere una semplice equazione algebrica per trovare la soluzione. Ulteriori semplificazioni sono date dal fatto che questo metodo soddisfa automaticamente le condizioni iniziali richieste e che la trasformata di Laplace gode di ottime proprietà (fra tutte, saranno fondamentali la linearità e la regola di derivazione).
Quindi, a parte l'eventuale difficoltà di calcolare l'antitrasformata di Laplace, questo metodo è un potente mezzo risolutivo.

ESEMPIO 6.1.

(i) Risolvere $\begin{cases} \dot{x} + x = 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$.

Applicando la trasformata di Laplace ad entrambi i membri della equazione, si ottiene

$$\mathcal{L}[\dot{x} + x] = \mathcal{L}[0] \iff \mathcal{L}[\dot{x}] + \mathcal{L}[x] = 0 \iff s\mathcal{L}[x] - x(0) + \mathcal{L}[x] = 0 \iff$$

$$\iff (s+1)\,\mathcal{L}[x] - x_0 = 0 \iff \mathcal{L}[x] = \frac{x_0}{s+1} \iff x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{x_0}{s+1}\right] =$$

$$= x_0\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] = x_0\,e^{-t}.$$

(ii) Risolvere $\begin{cases} \ddot{x} - \dot{x} - 2x = 0 \\ x(0) = 1 \\ \dot{x}(0) = 2 \end{cases}$.

Si ha

$$\mathcal{L}[\ddot{x} - \dot{x} - 2x] = \mathcal{L}[0] \iff \mathcal{L}[\ddot{x}] - \mathcal{L}[\dot{x}] - 2\mathcal{L}[x] = 0 \iff$$

$$\iff s^2\mathcal{L}[x] - sx(0) - \dot{x}(0) - \Big(s\mathcal{L}[x] - x(0)\Big) - 2\mathcal{L}[x] = 0 \iff$$

$$\Longleftrightarrow (s^2-s-2)\,\mathcal{L}[x]-s-1=0 \Longleftrightarrow \mathcal{L}[x]=\frac{s+1}{s^2-s-2}=\frac{s+1}{(s-2)(s+1)}=$$

$$=\frac{1}{s-2} \Longleftrightarrow x(t)=\mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{1}{s-2}\Big]=e^{2t}.$$

(iii) $\begin{cases} \ddot{x}-2\dot{x}-3x=e^{2t} \\ x(0)=2 \\ \dot{x}(0)=1 \end{cases} \Longleftrightarrow \mathcal{L}[\ddot{x}-2\dot{x}-3x]=\mathcal{L}[e^{2t}] \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \mathcal{L}[\ddot{x}]-2\mathcal{L}[\dot{x}]-3\mathcal{L}[x]=\frac{1}{s-2} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow s^2\mathcal{L}[x]-sx(0)-\dot{x}(0)-2\Big(s\mathcal{L}[x]-x(0)\Big)-3\mathcal{L}[x]=\frac{1}{s-2} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (s^2-2s-3)\,\mathcal{L}[x]-2s+3=\frac{1}{s-2} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \mathcal{L}[x]=\frac{2s^2-7s+7}{(s-2)(s^2-2s-3)}=\frac{1}{s-3}-\frac{1}{3(s-2)}+\frac{4}{3(s+1)} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow x(t)=\mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{1}{s-3}-\frac{1}{3(s-2)}+\frac{4}{3(s+1)}\Big]=$$

$$=\mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{1}{s-3}\Big]-\frac{1}{3}\,\mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{1}{s-2}\Big]+\frac{4}{3}\,\mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{1}{s+1}\Big]=e^{3t}-\frac{1}{3}e^{2t}+\frac{4}{3}e^{-t}.$$

(iv) Risolvere $\ddot{x}-\dot{x}-2x=0$ in generale. Si vogliono quindi trovare due soluzioni $\alpha(t)$, $\beta(t)$ linearmente indipendenti t.c. $x(t)=c_1\alpha(t)+c_2\beta(t)$, c_1, $c_2\in\mathbb{R}$. Per fare ciò, risolviamo l'equazione con differenti dati iniziali: in (ii) già è stata trovata una soluzione per $x(0)=1$, $\dot{x}(0)=2$. Andiamo, ora, a studiare l'equazione con $x(0)=1$, $\dot{x}(0)=0$:

$$\begin{cases} \ddot{x}-\dot{x}-2x=0 \\ x(0)=1 \\ \dot{x}(0)=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \mathcal{L}[\ddot{x}-\dot{x}-2x]=\mathcal{L}[0] \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \mathcal{L}[\ddot{x}]-\mathcal{L}[\dot{x}]-2\mathcal{L}[x]=0 \Longleftrightarrow s^2\mathcal{L}[x]-sx(0)-\dot{x}(0)-\Big(s\mathcal{L}[x]-x(0)\Big)-2\mathcal{L}[x]=0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (s^2-s-2)\,\mathcal{L}[x]-s+1=0 \Longleftrightarrow \mathcal{L}[x]=\frac{s-1}{s^2-s-2}=\frac{s-1}{(s-2)(s+1)}=$$

$$=\frac{1}{3}\,\frac{1}{s-2}+\frac{2}{3}\,\frac{1}{s+1} \Longleftrightarrow x(t)=\mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{1}{3}\,\frac{1}{s-2}+\frac{2}{3}\,\frac{1}{s+1}\Big]=$$

$$= \frac{1}{3}\,\mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{1}{s-2}\Big] + \frac{2}{3}\,\mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{1}{s+1}\Big] = \frac{1}{3}\,e^{2t} + \frac{2}{3}\,e^{-t}.$$

Quindi, la soluzione generale è data da

$$x(t) = c_1\,x_1(t) + c_2\,x_2(t) = c_1\,e^{2t} + c_2\left(\frac{1}{3}\,e^{2t} + \frac{2}{3}\,e^{-t}\right) =$$

$$= \left(c_1 + \frac{1}{3}\,c_2\right)e^{2t} + \frac{2}{3}\,c_2\,e^{-t} = {}^{9}C_1\,e^{2t} + C_2\,e^{-t}.$$

(v) $\begin{cases} t\ddot{x} + t\dot{x} + x = 0 \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 1 \end{cases} \iff \mathcal{L}[t\ddot{x} + t\dot{x} + x] = \mathcal{L}[0] \iff$

$$\iff \mathcal{L}[t\ddot{x}] + \mathcal{L}[t\dot{x}] + \mathcal{L}[x] = 0 \iff -\frac{d}{ds}(\mathcal{L}[\ddot{x}]) - \frac{d}{ds}(\mathcal{L}[\dot{x}]) + \mathcal{L}[x] = 0 \iff$$

$$\iff -\frac{d}{ds}\Big(s^2\mathcal{L}[x] - sx(0) - \dot{x}(0)\Big) - \frac{d}{ds}\Big(s\mathcal{L}[x] - x(0)\Big) + \mathcal{L}[x] = 0 \iff$$

$$\iff -\frac{d}{ds}\Big(s^2\mathcal{L}[x] - 1\Big) - \frac{d}{ds}\Big(s\mathcal{L}[x]\Big) + \mathcal{L}[x] = 0 \iff$$

$$\iff -2s\mathcal{L}[x] - s^2\,\frac{d}{ds}(\mathcal{L}[x]) - \mathcal{L}[x] - s\,\frac{d}{ds}(\mathcal{L}[x]) + \mathcal{L}[x] = 0 \iff$$

$$\iff (-s^2 - s)\,\mathcal{L}'[x] - 2s\mathcal{L}[x] = 0 \iff \mathcal{L}'[x] = -\frac{2s\mathcal{L}[x]}{s^2+s} = -\frac{2\mathcal{L}[x]}{s+1}.$$

Dunque, si è trovata un'altra equazione differenziale (di ordine minore) che, per separazione di variabili, porta a

$$\int_{\alpha}^{\mathcal{L}[x]} \frac{y'}{y}\,dy = \int_0^s -\frac{2}{r+1}\,dr \iff \log\left|\frac{\mathcal{L}[x]}{\alpha}\right| = -2\log|s+1| \iff$$

$$\iff \left|\frac{\mathcal{L}[x]}{\alpha}\right| = \frac{1}{(s+1)^2} \iff \mathcal{L}[x] = \frac{\alpha}{(s+1)^2} \iff x(t) = \mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{\alpha}{(s+1)^2}\Big] =$$

$$= \alpha\,\mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{1}{(s+1)^2}\Big] = \alpha\,te^{-t}.$$

Infine, poiché $1 = \dot{x}(0) = \Big[\alpha\,e^{-t} - \alpha\,te^{-t}\Big]_{t=0} = \alpha$, allora $x(t) = te^{-t}$.

[9] $C_1 := c_1 + \frac{1}{3}\,c_2,\ C_2 := \frac{2}{3}\,c_2$

N.B. In (v) non c'è stata perdita di generalità quando, in un passaggio, abbiamo tolto il modulo a $\frac{\mathcal{L}[x]}{\alpha}$. Infatti, se avessimo preso il segno negativo, avremmo raggiunto lo stesso risultato ottenuto prendendo il segno positivo:

$$-\frac{\mathcal{L}[x]}{\alpha} = \frac{1}{(s+1)^2} \iff \mathcal{L}[x] = -\frac{\alpha}{(s+1)^2} \iff x(t) = \mathcal{L}^{-1}\Big[-\frac{\alpha}{(s+1)^2}\Big] =$$

$$= -\alpha\, \mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{1}{(s+1)^2}\Big] = -\alpha\, te^{-t}.$$

Infine, dato che $1 = \dot{x}(0) = \Big[-\alpha\, e^{-t} + \alpha\, te^{-t}\Big]_{t=0} = -\alpha \iff \alpha = -1$, allora $x(t) = te^{-t}$.

OSSERVAZIONE 6.1.

(i) Negli esempi precedenti, abbiamo sfruttato che le condizioni iniziali fossero centrate in zero: ciò è molto utile in vista della proprietà di derivazione della trasformata di Laplace. Tuttavia, si noti che ciò non è una perdita di generalità se l'equazione è autonoma perché, se si hanno condizioni iniziali della forma $x(t_0) = x_0$, $t_0 \neq 0$, ci si può sempre ricondurre a $x(0) = \tilde{x}_0$ tramite traslazione.

(ii) Per quanto appena visto, si vede facilmente come la trasformata di Laplace è molto utile per risolvere equazioni differenziali lineari (omogenee e non) con coefficienti costanti a valori iniziali, mentre perde un po' d'efficacia (sebbene possa essere comunque utilizzata) nella risoluzione di equazioni differenziali con coefficienti non costanti oppure senza valori iniziali.

La convoluzione

7

In quest'ultimo capitolo, definiremo l'operatore di convoluzione e descriveremo le sue principali proprietà perché sara d'aiuto nella risoluzione di alcune equazioni differenziali.

DEFINIZIONE 7.1. Siano $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funzioni continue a tratti. Si definisce la *convoluzione* di f e g, denotata $f * g$, la funzione

$$(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)\, g(y)\, dy.$$

OSSERVAZIONE 7.1.

(i) A priori, $f * g$ può divergere. Per ovviare a ciò, possiamo assumere che f sia limitata e $|g|$ sia integrabile in $\mathbb{R}$, così da avere

$$|(f * g)(x)| = \lim_{r \to +\infty} \left| \int_{-r}^{r} f(x-y)\, g(y)\, dy \right| \leq \lim_{r \to +\infty} \int_{-r}^{r} |f(x-y)|\, |g(y)|\, dy \leq {}^{10}$$

$$\leq \lim_{r \to +\infty} \sup_{z} |f(z)| \int_{-r}^{r} |g(y)|\, dy <{}^{11} +\infty \iff -\infty < (f * g)(x) < +\infty.$$

(ii) Non assumeremo f e g come nel punto precedente (nonostante possa esserci ambiguità) perché la convoluzione verrà usata solo in vista della trasformata di Laplace, la quale farà apparire un esponenziale con esponente negativo che renderà quindi tutto integrabile.

(iii) La convoluzione gode della commutatività:

$$(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)\, g(y)\, dy = {}^{11} - \int_{+\infty}^{-\infty} f(y')\, g(x-y')\, dy' =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-y')\, f(y')\, dy' =: (g * f)(x).$$

[10] $z := x - y$ e f limitata
[11] $|g|$ integrabile su $\mathbb{R}$
[11] $y' := x - y,\ dy' = -dy$

PROPOSIZIONE 7.1 (Proprietà della convoluzione). Siano $f, g \in \mathcal{C}$ t.c. $f(t) = 0 = g(t)$ se $t < 0$. Allora:

(i) $\mathcal{L}[f * g] = \mathcal{L}[f]\ \mathcal{L}[g]$.

(ii) Se $f = \mathcal{L}^{-1}[F]$ e $g = \mathcal{L}^{-1}[G]$, si ha che $\mathcal{L}[FG] = f * g$.

Dimostrazione.

(i) Notiamo che, per ipotesi,

$$(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)\, g(y)\, dy = \int_{0}^{+\infty} f(x-y)\, g(y)\, dy = \int_{0}^{x} f(x-y)\, g(y)\, dy,$$

essendo $f(x-y) = 0$ se $x < y$. Ora, la tesi segue dal teorema di Fubini:

$$\mathcal{L}[f * g] := \int_0^{+\infty} e^{-st} \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-y)\, g(y)\, dy \Big)\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-st} \Big(\int_0^{t} f(t-y)\, g(y)\, dy \Big)\, dt = {}^{12}$$

$$= \int\int_D e^{-st} f(t-y)\, g(y)\, dy\, dt = \int_0^{+\infty} \Big(\int_y^{+\infty} e^{-st}\, f(t-y)\, g(y)\, dt \Big)\, dy = {}^{13}$$

$$= \int_0^{+\infty} \Big(\int_0^{+\infty} e^{-s(u+y)}\, f(u)\, g(y)\, du \Big)\, dy = \Big(\int_0^{+\infty} e^{-su} f(u)\, du \Big) \Big(\int_0^{+\infty} e^{-sy} g(y)\, dy \Big) =$$

$$= \mathcal{L}[f]\ \mathcal{L}[g].$$

(ii) Innanzitutto,

$$f = \mathcal{L}^{-1}[F] \iff F = \mathcal{L}[f] \quad e \quad g = \mathcal{L}^{-1}[G] \iff G = \mathcal{L}[g].$$

Dopodiché, si ha

$$\mathcal{L}^{-1}[FG] = \mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}[f]\ \mathcal{L}[g]] = {}^{14}\mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}[f * g]] = f * g.$$

N.B. Nella proposizione precedente, non c'è realmente bisogno di assumere che $f(t) = 0 = g(t)$ se $t < 0$, ma la dimostrazione nel caso generale è inutilmente lunga e analoga a quella del teorema di convoluzione per le trasformate di Fourier. Basterebbe quindi assumere che f e g appartengano a $\mathcal{C}$, affinché $\mathcal{L}[f]$ e $\mathcal{L}[g]$ esistano e siano finite (vedi (ii) dell'osservazione 3.1.).

[12] $D := \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq t\}$
[13] $t := u + y,\ dt = du$
[14] per (i)

ESEMPIO 7.1. Risolvere $\begin{cases} \dot{x} + kx = f \\ x(0) = x_0 \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}$.

Come di consueto, applichiamo la trasformata di Laplace ad entrambi i membri:

$$\mathcal{L}[\dot{x}+kx] = \mathcal{L}[f] \iff \mathcal{L}[\dot{x}]+k\mathcal{L}[x] = \mathcal{L}[f] \iff s\mathcal{L}[x]-x(0)+k\mathcal{L}[x] = \mathcal{L}[f] \iff$$

$$\iff (s+k)\,\mathcal{L}[x] = \mathcal{L}[f] + x_0 \iff \mathcal{L}[x] = \frac{\mathcal{L}[f]+x_0}{s+k} \iff$$

$$\iff x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mathcal{L}[f]+x_0}{s+k}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mathcal{L}[f]}{s+k}\right] + x_0\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+k}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mathcal{L}[f]}{s+k}\right] + x_0\,e^{-kt}.$$

Utilizziamo le proprietà della convoluzione appena descritte per calcolare $\mathcal{L}^{-1}[\frac{\mathcal{L}[f]}{s+k}]$:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mathcal{L}[f]}{s+k}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\mathcal{L}[f]\,\frac{1}{s+k}\right] = {}^{15}\Big(\mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}[f]]\Big) * \left(\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+k}\right]\right) =$$

$$= f * e^{-kt} = \int_0^t f(t-r)\,e^{-kr}\,dr.$$

Dunque, in conclusione si ottiene

$$x(t) = x_0\,e^{-kt} + \int_0^t f(t-r)\,e^{-kr}\,dr.$$

OSSERVAZIONE 7.2.

(i) Questo esempio è perfetto per mostrare l'efficacia della trasformata di Laplace: infatti, nonostante ci fossero tre indeterminate (il parametro k, la funzione f e il dato iniziale x_0), la risoluzione è stata piuttosto semplice e veloce. Si noti anche che non c'é stato bisogno di conoscere l'identità di $\mathcal{L}[f]$.

(ii) La formula appena trovata è proprio la soluzione generale dell'esempio 7.1. al variare di $k \in \mathbb{R}$, $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$ e $f \in \mathcal{C}$.

[15] per (ii) della proposizione 7.1.

(iii) La trasformata di Laplace può essere utilizzata perfino nella risoluzione di sistemi: talvolta il suo utilizzo può essere vantaggioso rispetto al calcolo di un esponenziale di matrice (il quale non sempre è immediato) e della formula generale data da

$$X(t) = X_0\, e^{A(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} F(s)\, ds.$$

ESEMPIO 7.2. $\begin{cases} \dot{X} = AX + F(t) \\ X \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}, \quad X := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad A := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$

$$\begin{array}{rcl} F : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & \longmapsto & \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \iff \begin{cases} \dot{x} = 3x + t \\ \dot{y} = y + 1 \\ \dot{z} = y + z \end{cases}.$$

Applicando la trasformata di Laplace a tutte le equazioni, si ottiene

$$\begin{cases} \mathcal{L}[\dot{x}] = \mathcal{L}[3x + t] \\ \mathcal{L}[\dot{y}] = \mathcal{L}[y + 1] \\ \mathcal{L}[\dot{z}] = \mathcal{L}[y + z] \end{cases} \iff \begin{cases} s\mathcal{L}[x] - x(0) = 3\mathcal{L}[x] + \mathcal{L}[t] \\ s\mathcal{L}[y] - y(0) = \mathcal{L}[y] + \mathcal{L}[1] \\ s\mathcal{L}[z] - x(0) = \mathcal{L}[y] + \mathcal{L}[z] \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} (s-3)\ \mathcal{L}[x] = \frac{1}{s^2} + 1 = \frac{s^2+1}{s^2} \\ (s-1)\ \mathcal{L}[y] = \frac{1}{s} + 1 = \frac{s+1}{s} \\ (s-1)\ \mathcal{L}[z] = \mathcal{L}[y] + 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \mathcal{L}[x] = \frac{s^2+1}{s^2(s-3)} \\ \mathcal{L}[y] = \frac{s+1}{s(s-1)} \\ \mathcal{L}[z] = \frac{\mathcal{L}[y]+1}{s-1} = \frac{s^2+1}{s(s-1)^2} \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^2+1}{s^2(s-3)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{1}{9s} - \frac{1}{3s^2} + \frac{10}{9(s-3)}\right] \\ y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{s(s-1)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{1}{s} + \frac{2}{s-1}\right] \\ z(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^2+1}{s(s-1)^2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} + \frac{2}{(s-1)^2}\right] \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x(t) = -\frac{1}{9}\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - \frac{1}{3}\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] + \frac{10}{9}\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-3}\right] = -\frac{1}{9} - \frac{t}{3} + \frac{10}{9}\ e^{3t} \\ y(t) = -\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] + 2\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] = -1 + 2e^t \\ z(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] + 2\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^2}\right] = 1 + 2te^t \end{cases}.$$

Bibliografia

[Ahm19] Ambrosetti A. Ahmad S. *Differential Equations*. The Deutsche Nationalbibliothek, 2019.

[Cod95] Levinson N. Coddington E. *Theory of ordinary differential equations*. McGraw-Hill Education, 1995.

[G12] Teschl G. *Ordinary Differential Equations and Dynamical System*. American Mathematical Society, 2012.

Sitografia

[03] *Laplace transform*. 2003. URL: `https://en.wikipedia.org/wiki/Laplace_transform` (visitato il 12 dic. 2019).

[04] *La Trasformata di Laplace*. 2004. URL: `https://dmi.units.it/~obersnel/Laplace.pdf` (visitato il 12 dic. 2019).

[05] *La Trasformata di Laplace*. 2005. URL: `https://it.wikipedia.org/wiki/Trasformata_di_Laplace` (visitato il 12 dic. 2019).